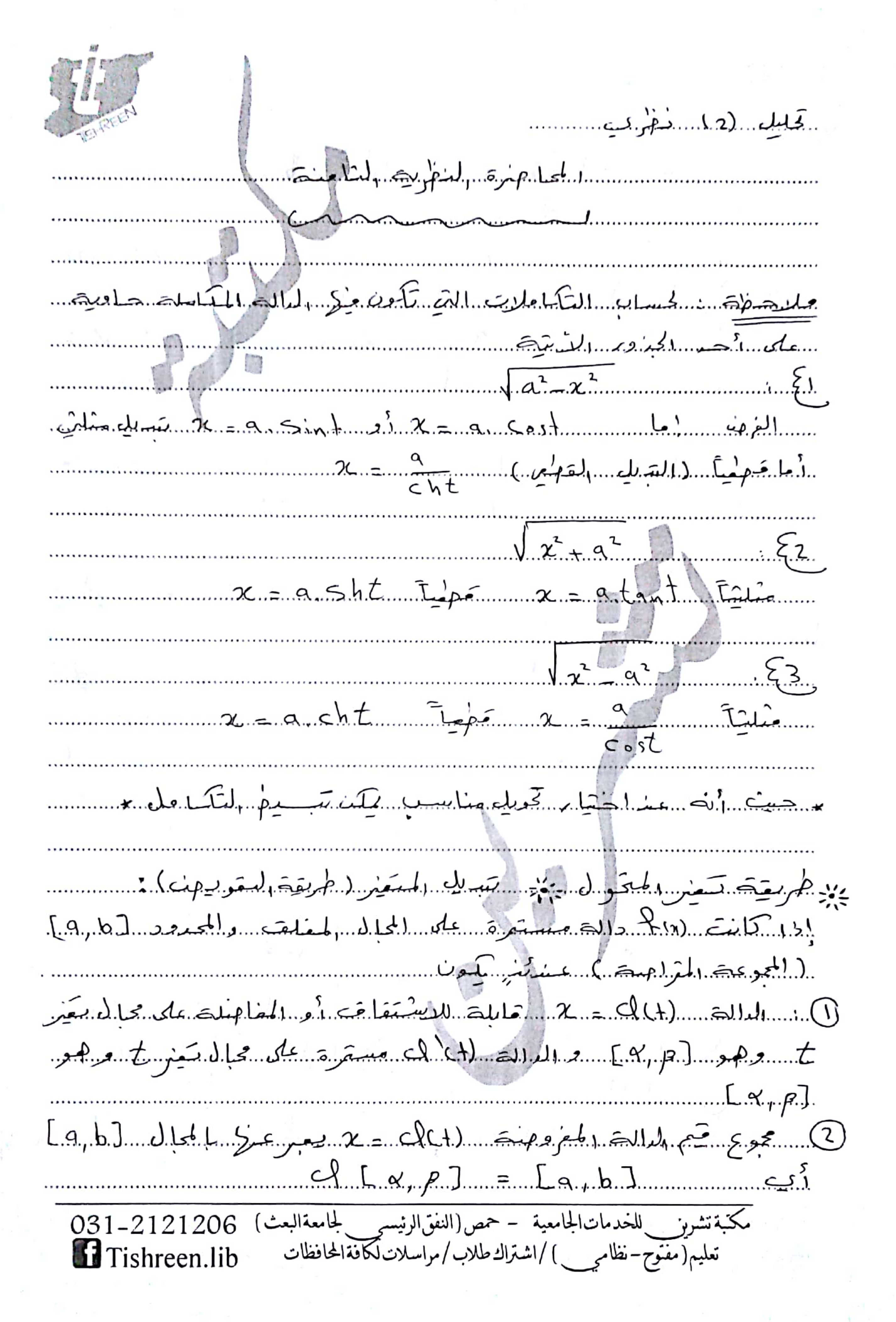


المحاضرة النظرية الثامنة

ملاحظة: لحساب التكاملات التي تكون فيها الدالة المكاملة حاوية على أحد الجذور التالية:

1) $\sqrt{a^2-x^2}$

الفرض: إما $x = a.\sin t$ أو $x = a.\cos t$ تبديل مثلثي

أما قطعياً (التبديل القطعي) $x = \frac{a}{ch\,t}$

2) $\sqrt{x^2+a^2}$

مثلثياً $x = a.\tan t$ قطعياً $x = a.sh\,t$

3) $\sqrt{x^2-a^2}$

مثلثياً $x = \frac{a}{\cos t}$ قطعياً $x = a.ch\,t$

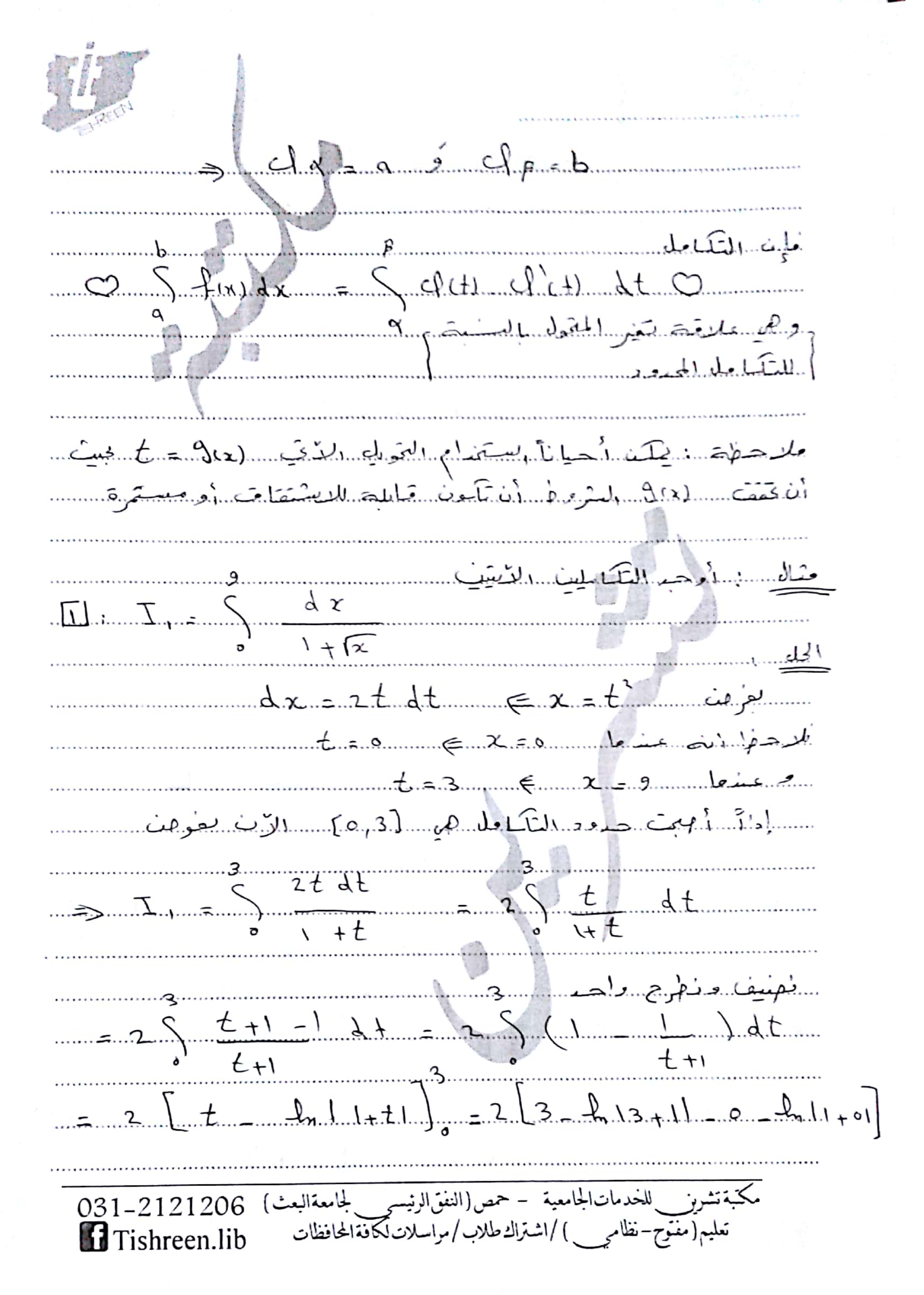
* حيث أنه عند اختيار تحويل مناسب يمكن تبسيط التكامل *

☼ طريقة تصغير المجهول ☼ تبديل المتغير (طريقة التعويض):

إذا كانت $f(x)$ دالة مستمرة على المجال المغلق والمحدود $[a,b]$ (المجموعة المتراصة) عندئذٍ يكون

1) الدالة $x = \varphi(t)$ قابلة للاشتقاق أو المفاضلة على مجال يتغير t وهو $[\alpha,\beta]$ والدالة $\varphi'(t)$ مستمرة على مجال يتغير t وهو $[\alpha,\beta]$.

2) مجموع قيم الدالة المفروضة $x = \varphi(t)$ يعبر عن المجال $[a,b]$ أي $\varphi[\alpha,\beta] = [a,b]$



$\Rightarrow \varphi(\alpha)=a$ و $\varphi(\beta)=b$

فإن التكامل

♡ $\int_a^b f(x)\,dx = \int_\alpha^\beta \varphi(t)\,\varphi'(t)\,dt$ ♡

وهي علاقة تغير المتحول بالنسبة للتكامل المحدود

ملاحظة: يمكن أحياناً استخدام التحويل الآتي $t=g(x)$ بحيث أن تحقق الشروط أن تكون $g(x)$ قابلة للاشتقاق أو مستمرة

مثال: أوجد التكاملين الآتيين

1: $I_1=\int_0^9 \frac{dx}{1+\sqrt{x}}$

الحل:

نفرض $x=t^2 \Rightarrow dx=2t\,dt$

نلاحظ أنه عندما $x=0 \Rightarrow t=0$

وعندما $x=9 \Rightarrow t=3$

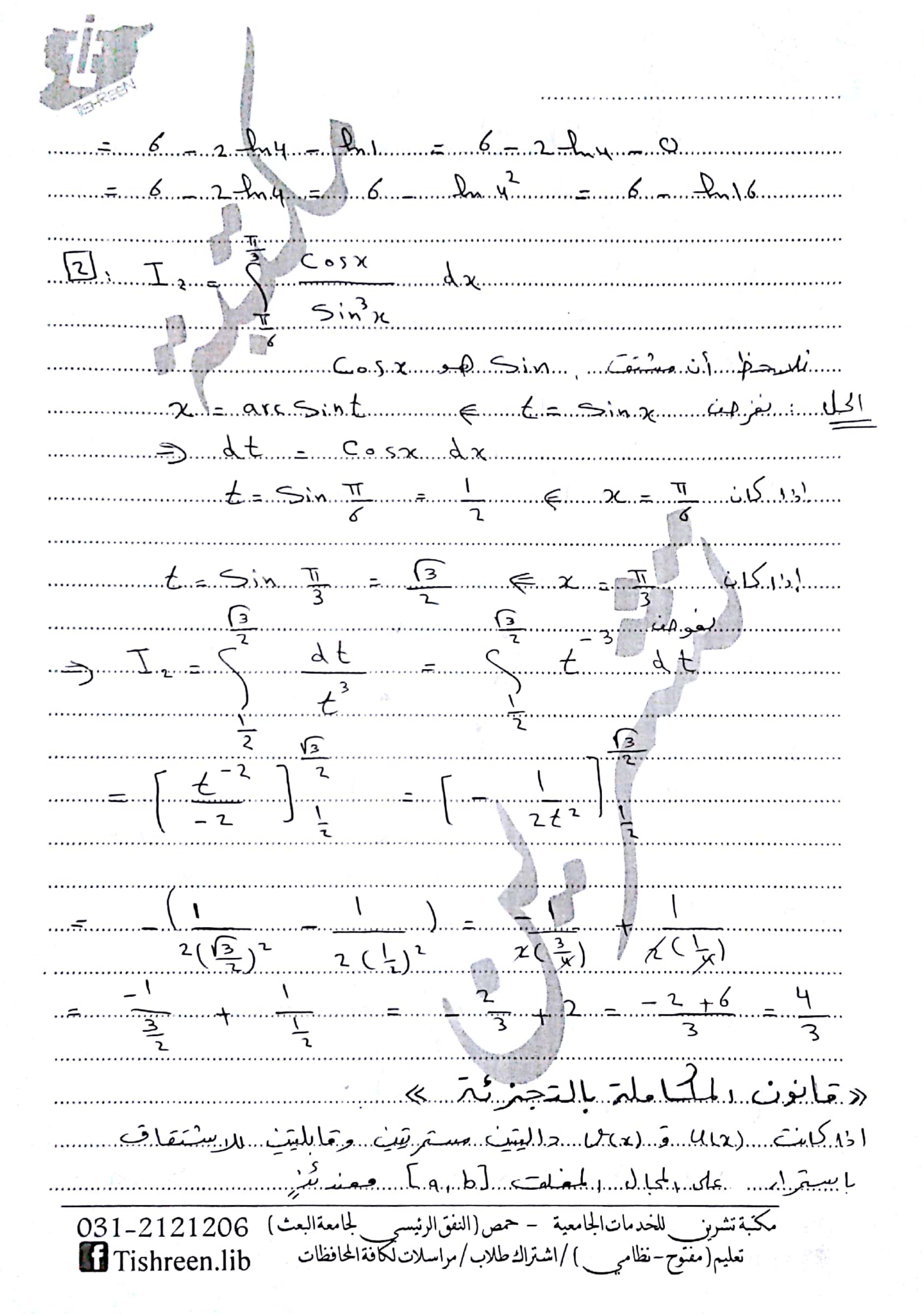
إذاً أصبحت حدود التكامل هي $[0,3]$ الآن نعوض

$$\Rightarrow I_1=\int_0^3 \frac{2t\,dt}{1+t} = 2\int_0^3 \frac{t}{1+t}\,dt$$

نضيف ونطرح واحد

$$=2\int_0^3 \frac{t+1-1}{t+1}\,dt = 2\int_0^3 \left(1-\frac{1}{t+1}\right)dt$$

$$=2\left[t-\ln|1+t|\right]_0^3 = 2\left[3-\ln|3+1|-0-\ln|1+0|\right]$$



$= 6 - 2\ln 4 - \ln 1 = 6 - 2\ln 4 - 0$

$= 6 - 2\ln 4 = 6 - \ln 4^2 = 6 - \ln 16$

[2]: $I_2 = \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}} \frac{\cos x}{\sin^3 x}\, dx$

نلاحظ أن مشتق $\sin$ هو $\cos x$

الحل: نفرض $t = \sin x \Leftarrow x = \arcsin t$

$\Rightarrow dt = \cos x\, dx$

إذا كان $x = \frac{\pi}{6} \Leftarrow t = \sin\frac{\pi}{6} = \frac{1}{2}$

إذا كان $x = \frac{\pi}{3} \Leftarrow t = \sin\frac{\pi}{3} = \frac{\sqrt{3}}{2}$

نعوض

$\Rightarrow I_2 = \int_{\frac{1}{2}}^{\frac{\sqrt{3}}{2}} \frac{dt}{t^3} = \int_{\frac{1}{2}}^{\frac{\sqrt{3}}{2}} t^{-3}\, dt$

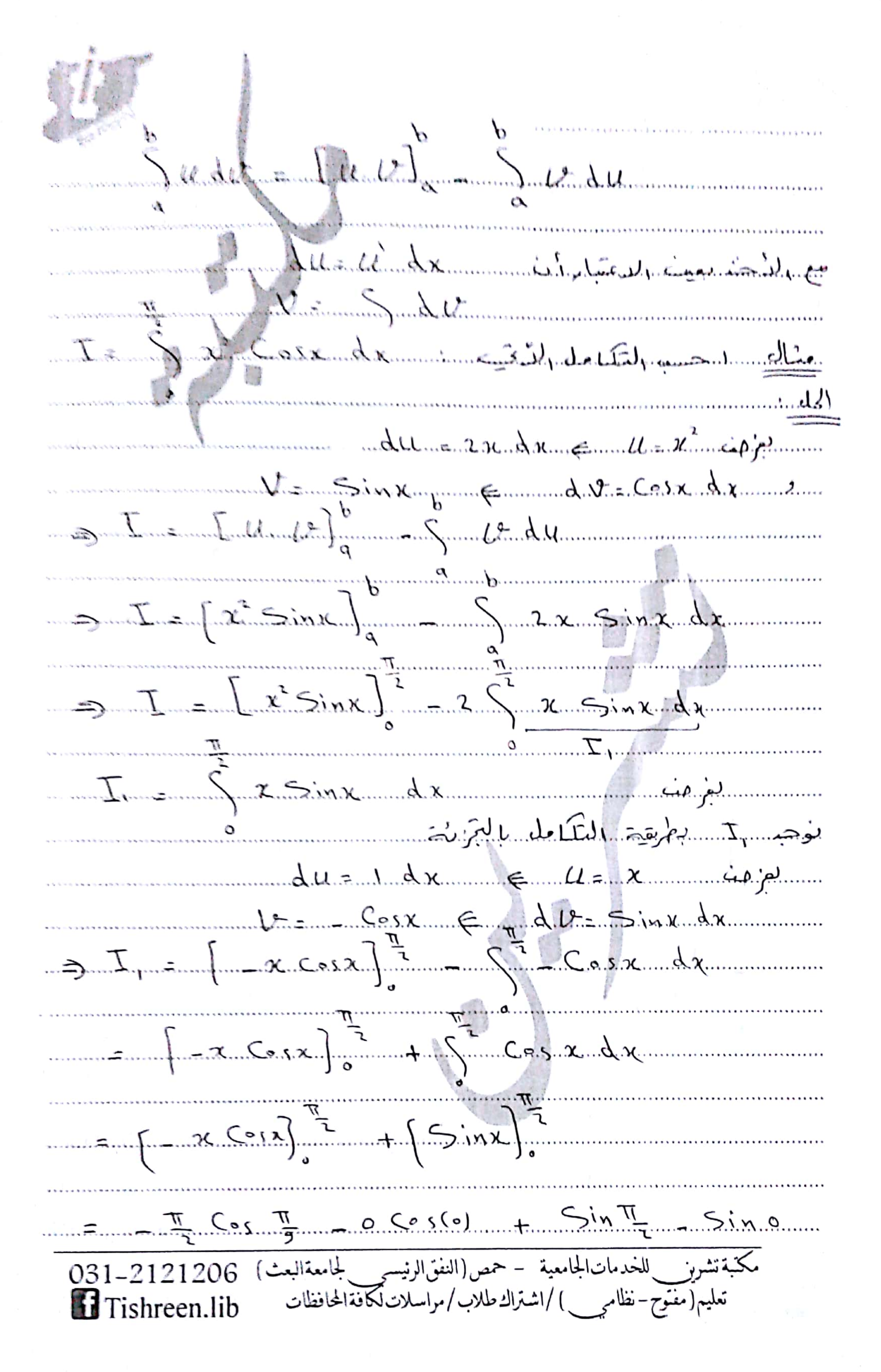
$= \left[\frac{t^{-2}}{-2}\right]_{\frac{1}{2}}^{\frac{\sqrt{3}}{2}} = \left[-\frac{1}{2t^2}\right]_{\frac{1}{2}}^{\frac{\sqrt{3}}{2}}$

$= -\left(\frac{1}{2\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2} - \frac{1}{2\left(\frac{1}{2}\right)^2}\right) = \frac{-1}{2\left(\frac{3}{4}\right)} + \frac{1}{2\left(\frac{1}{4}\right)}$

$= \frac{-1}{\frac{3}{2}} + \frac{1}{\frac{1}{2}} = -\frac{2}{3} + 2 = \frac{-2+6}{3} = \frac{4}{3}$

«قانون المكاملة بالتجزئة»

إذا كانت $u(x)$ و $v(x)$ دالتين مستمرتين وقابلتين للاشتقاق باستمرار على المجال المغلق $[a, b]$ وعندئذٍ



$$\int_a^b u\,dv = [u\,v]_a^b - \int_a^b v\,du$$

مع الأخذ بعين الاعتبار أن $du = u'\,dx$

$v = \int dv$

مثال: احسب التكامل الآتي: $I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} x^2 \cos x\,dx$

الحل:

نفرض $du = 2x\,dx \Leftarrow u = x^2$

و $v = \sin x \Leftarrow dv = \cos x\,dx$

$$\Rightarrow I = [u\,v]_a^b - \int_a^b v\,du$$

$$\Rightarrow I = [x^2 \sin x]_a^b - \int_a^b 2x \sin x\,dx$$

$$\Rightarrow I = [x^2 \sin x]_0^{\frac{\pi}{2}} - 2\underbrace{\int_0^{\frac{\pi}{2}} x \sin x\,dx}_{I_1}$$

بفرض $I_1 = \int_0^{\frac{\pi}{2}} x \sin x\,dx$

نوجد I_1 بطريقة التكامل بالتجزئة

نفرض $du = 1\,dx \Leftarrow u = x$

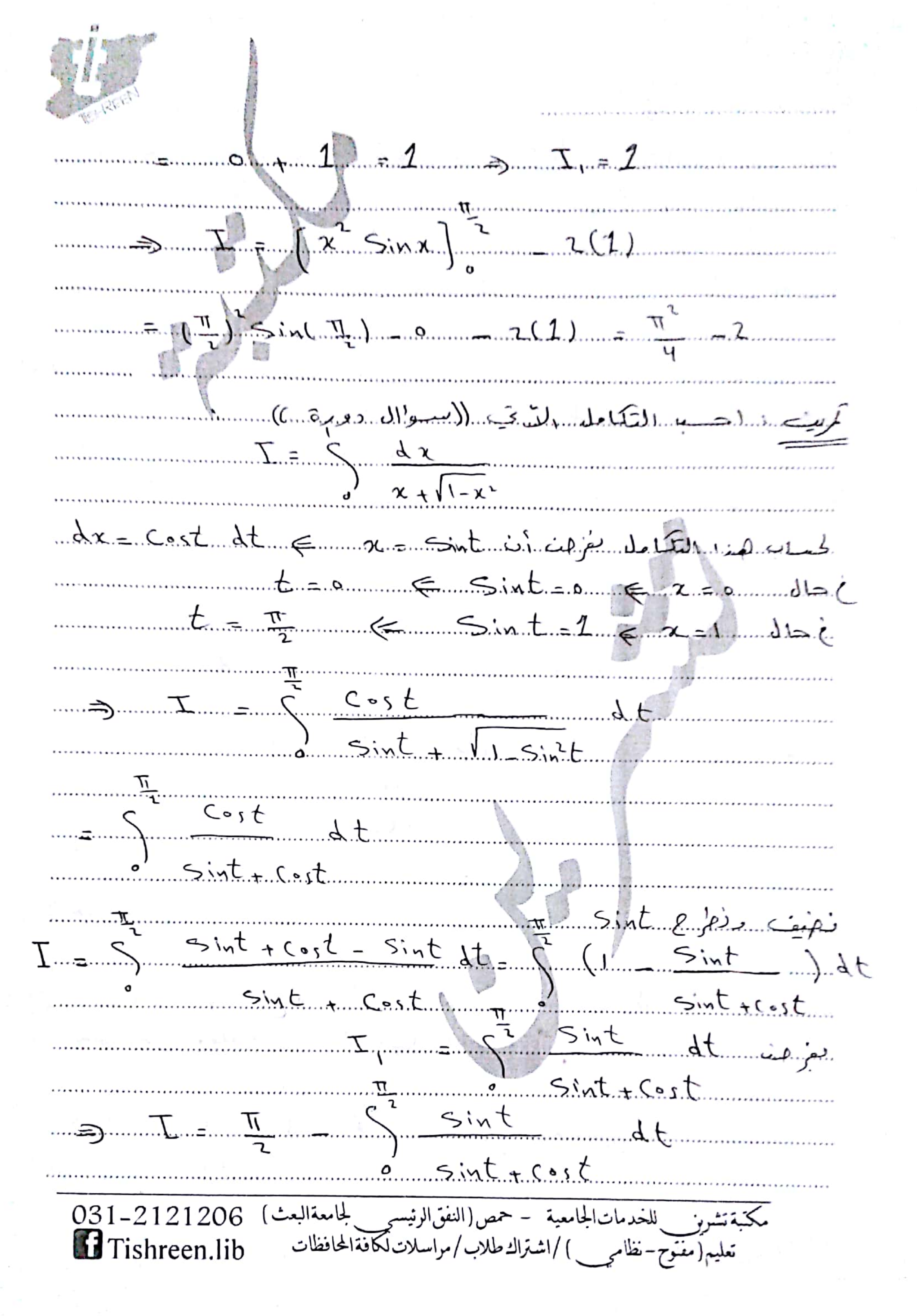
$v = -\cos x \Leftarrow dv = \sin x\,dx$

$$\Rightarrow I_1 = [-x \cos x]_0^{\frac{\pi}{2}} - \int_0^{\frac{\pi}{2}} -\cos x\,dx$$

$$= [-x \cos x]_0^{\frac{\pi}{2}} + \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos x\,dx$$

$$= [-x \cos x]_0^{\frac{\pi}{2}} + [\sin x]_0^{\frac{\pi}{2}}$$

$$= -\frac{\pi}{2} \cos \frac{\pi}{2} - 0 \cos(0) + \sin \frac{\pi}{2} - \sin 0$$



$$= 0 + 1 = 1 \Rightarrow I_1 = 1$$

$$\Rightarrow I = \left[x^2 \sin x\right]_0^{\frac{\pi}{2}} - 2(1)$$

$$= \left(\frac{\pi}{2}\right)^2 \sin\left(\frac{\pi}{2}\right) - 0 - 2(1) = \frac{\pi^2}{4} - 2$$

تمرين: احسب التكامل الآتي (سؤال دورة)

$$I = \int_0^1 \frac{dx}{x + \sqrt{1 - x^2}}$$

لحساب هذا التكامل نفرض أن $x = \sin t \Leftarrow dx = \cos t \, dt$

في حال $x = 0 \Leftarrow \sin t = 0 \Leftarrow t = 0$

في حال $x = 1 \Leftarrow \sin t = 1 \Leftarrow t = \frac{\pi}{2}$

$$\Rightarrow I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos t}{\sin t + \sqrt{1 - \sin^2 t}} \, dt$$

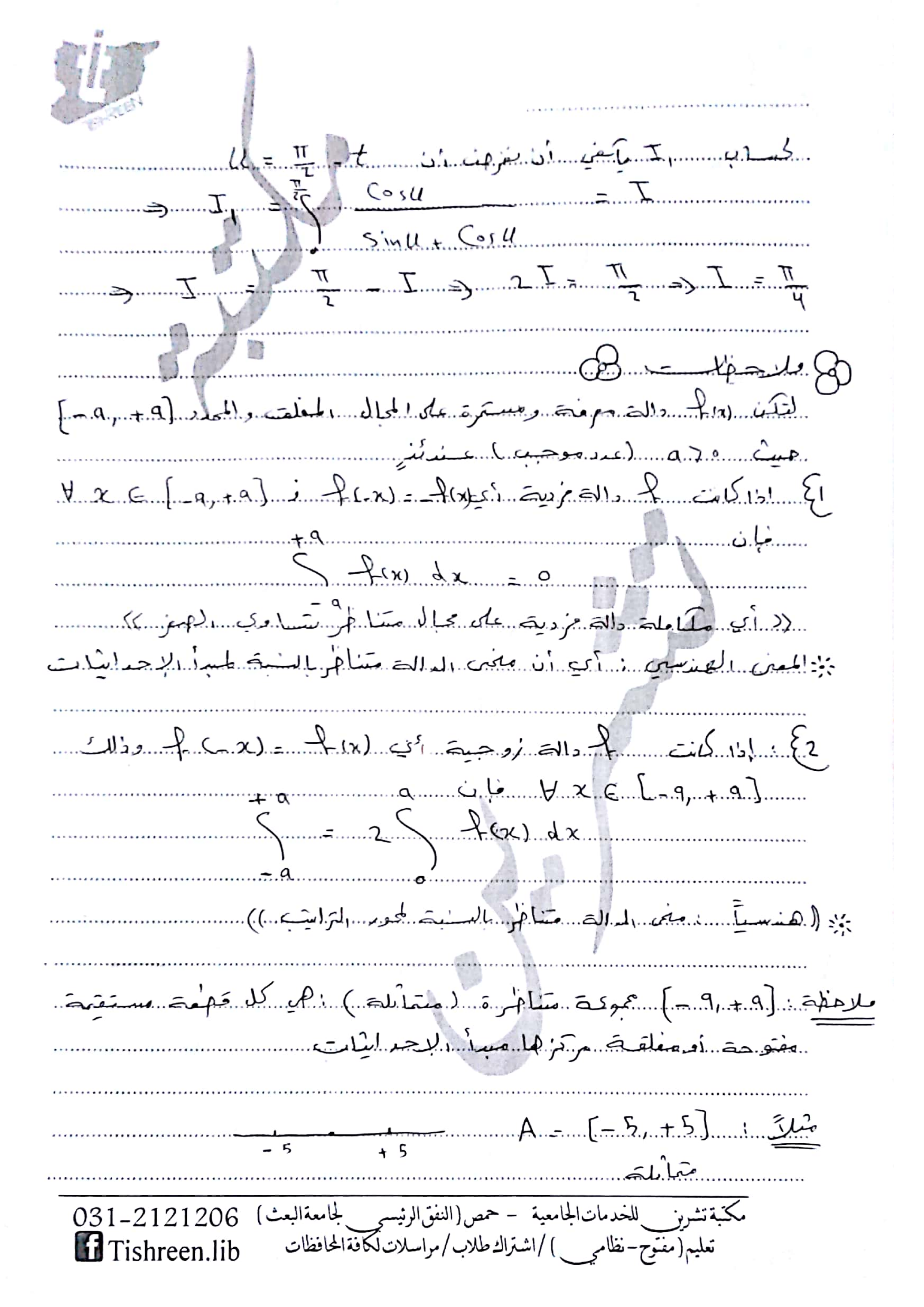
$$= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos t}{\sin t + \cos t} \, dt$$

نضيف ونطرح $\sin t$

$$I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin t + \cos t - \sin t}{\sin t + \cos t} \, dt = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(1 - \frac{\sin t}{\sin t + \cos t}\right) dt$$

نفرض $I_1 = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin t}{\sin t + \cos t} \, dt$

$$\Rightarrow I = \frac{\pi}{2} - \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin t}{\sin t + \cos t} \, dt$$



لحساب I_1 يكفي أن نفرض أن $u = \frac{\pi}{2} - t$

$$\Rightarrow I_1 = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos u}{\sin u + \cos u} = I$$

$$\Rightarrow I = \frac{\pi}{2} - I \Rightarrow 2I = \frac{\pi}{2} \Rightarrow I = \frac{\pi}{4}$$

ملاحظات

لتكن $f(x)$ دالة معرفة ومستمرة على المجال المغلق والمحدد $[-a, +a]$ حيث $a > 0$ (عدد موجب) عندئذٍ

1) إذا كانت f دالة فردية أي $f(-x) = -f(x)$: $\forall x \in [-a, +a]$ فإن

$$\int_{-a}^{+a} f(x)\,dx = 0$$

« أي تكاملة دالة فردية على مجال متناظر تساوي الصفر »

※ المعنى الهندسي : أي أن منحنى الدالة متناظر بالنسبة لمبدأ الإحداثيات

2) إذا كانت f دالة زوجية أي $f(-x) = f(x)$ وذلك $\forall x \in [-a, +a]$ فإن

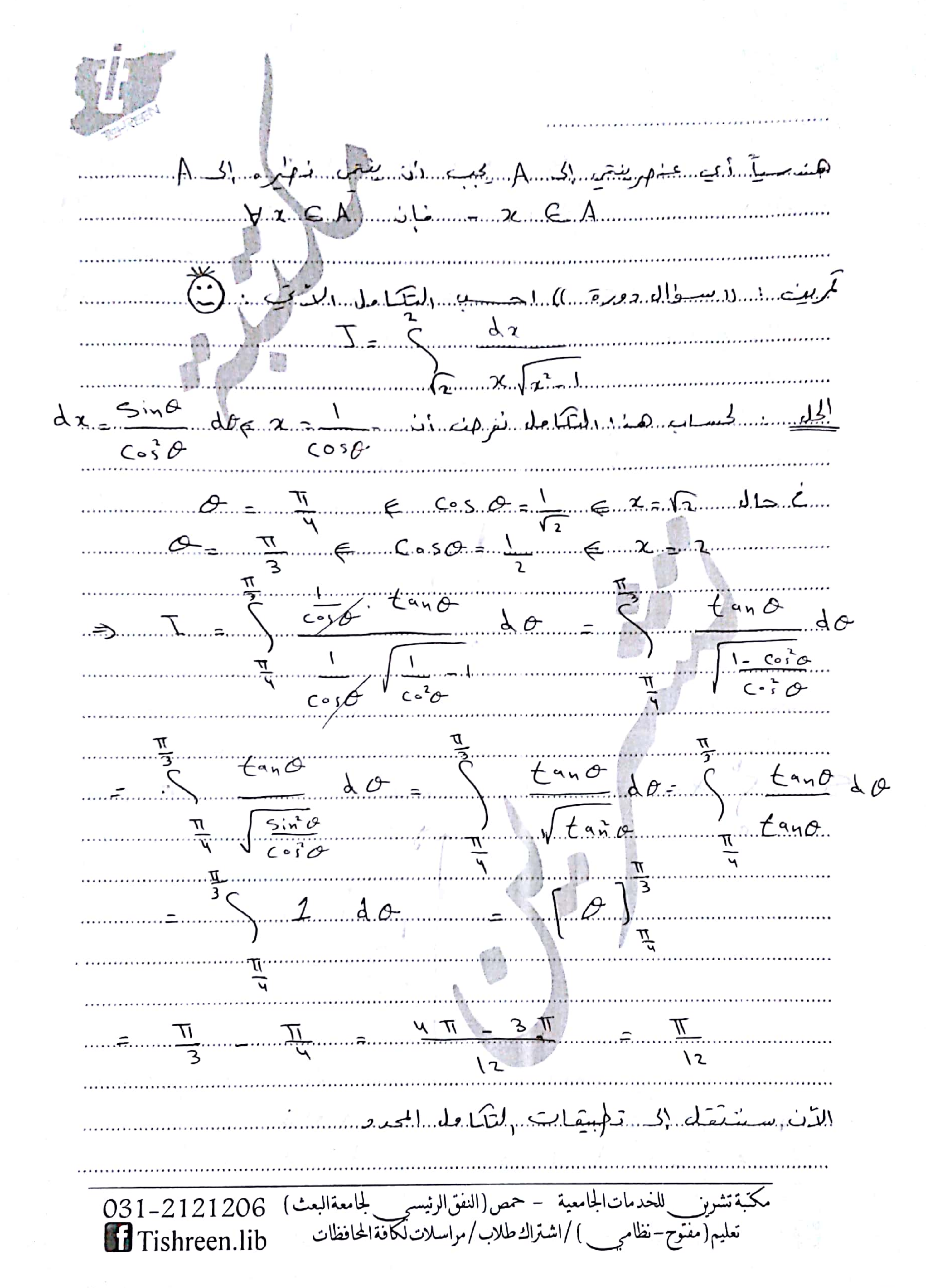
$$\int_{-a}^{+a} = 2\int_0^{a} f(x)\,dx$$

※ (هندسياً : منحنى الدالة متناظر بالنسبة لمحور التراتيب)

ملاحظة : $[-a, +a]$ مجموعة متناظرة (متماثلة) : أي كل قطعة مستقيمة مفتوحة أو مغلقة مركزها مبدأ الإحداثيات

مثال : $A = [-5, +5]$ متماثلة

-5 $+5$



هندسياً أي عنصر ينتمي إلى A يجب أن ينتمي نظيره إلى A

$\forall x \in A$ فإن $-x \in A$

تمرين: ((سؤال دورة)) احسب التكامل الآتي:

$$I = \int_{\sqrt{2}}^{2} \frac{dx}{x\sqrt{x^2-1}}$$

الحل: لحساب هذا التكامل نفرض أن: $x = \frac{1}{\cos\theta} \Leftarrow dx = \frac{\sin\theta}{\cos^2\theta}\,d\theta$

في حال $x = \sqrt{2} \Leftarrow \cos\theta = \frac{1}{\sqrt{2}} \Leftarrow \theta = \frac{\pi}{4}$

$x = 2 \Leftarrow \cos\theta = \frac{1}{2} \Leftarrow \theta = \frac{\pi}{3}$

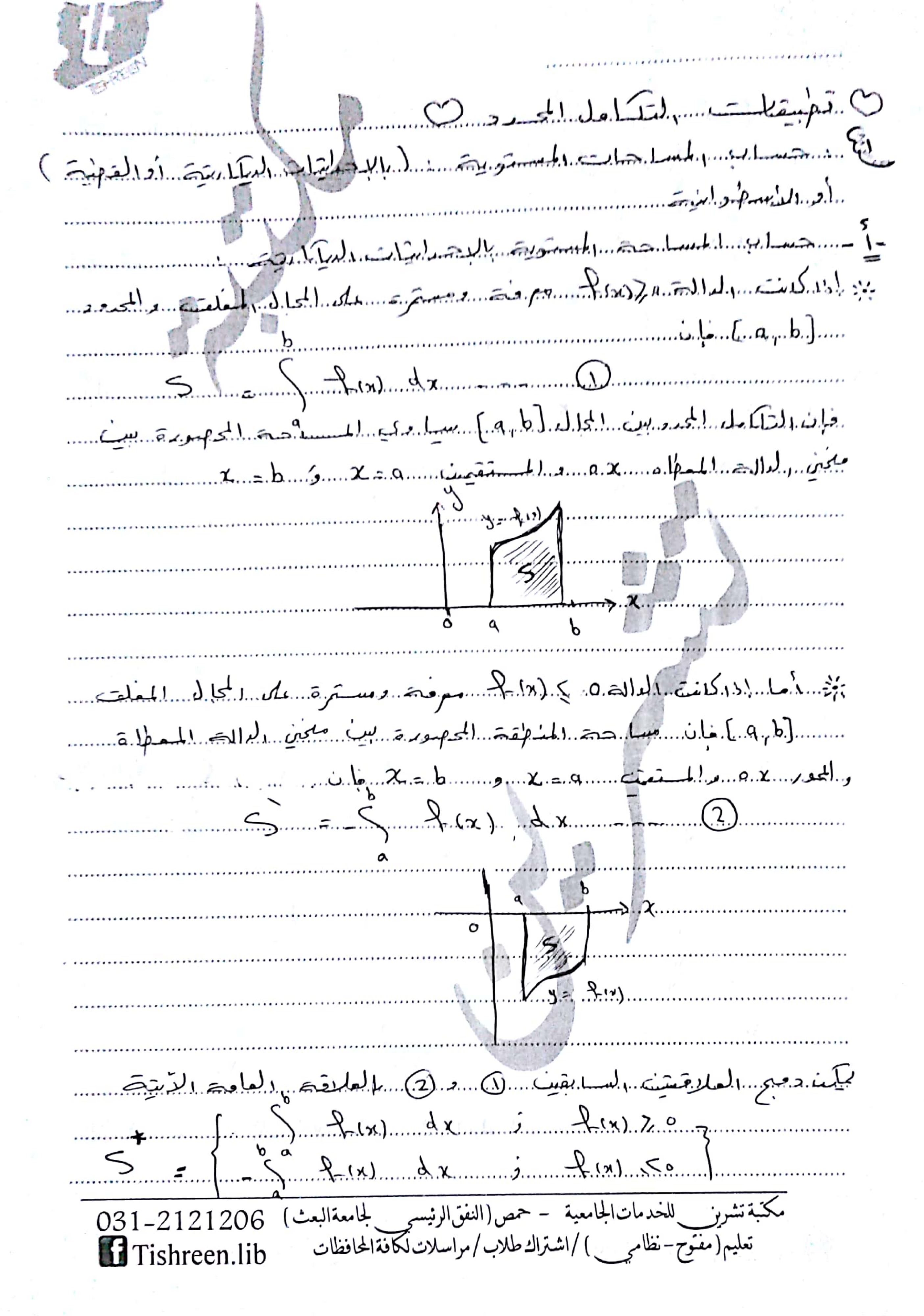
$$\Rightarrow I = \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}} \frac{\frac{1}{\cos\theta}\cdot\tan\theta}{\frac{1}{\cos\theta}\sqrt{\frac{1}{\cos^2\theta}-1}}\,d\theta = \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}} \frac{\tan\theta}{\sqrt{\frac{1-\cos^2\theta}{\cos^2\theta}}}\,d\theta$$

$$= \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}} \frac{\tan\theta}{\sqrt{\frac{\sin^2\theta}{\cos^2\theta}}}\,d\theta = \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}} \frac{\tan\theta}{\sqrt{\tan^2\theta}}\,d\theta = \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}} \frac{\tan\theta}{\tan\theta}\,d\theta$$

$$= \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}} 1\,d\theta = \left[\theta\right]_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}}$$

$$= \frac{\pi}{3} - \frac{\pi}{4} = \frac{4\pi - 3\pi}{12} = \frac{\pi}{12}$$

الآن سننتقل إلى تطبيقات التكامل المحدد



تطبيقات التكامل المحدد

رابعاً: حساب المساحات المستوية (بالإحداثيات الديكارتية أو القطبية أو البارامترية)

أ- حساب المساحة المستوية بالإحداثيات الديكارتية

※ إذا كانت الدالة $f(x) \geq 0$ معرفة ومستمرة على المجال المغلق والمحدود $[a,b]$ فإن

$$S = \int_a^b f(x)\,dx \quad \text{---} \quad (1)$$

فإن التكامل المحدود بين المجال $[a,b]$ يساوي المساحة المحصورة بين منحني الدالة المعطاة و o.x والمستقيمين $x=a$ و $x=b$

※ أما إذا كانت الدالة $f(x) \leq 0$ معرفة ومستمرة على المجال المغلق $[a,b]$ فإن مساحة المنطقة المحصورة بين منحني الدالة المعطاة والمحور o.x والمستقيمين $x=a$ و $x=b$ فإن

$$S = -\int_a^b f(x)\,dx \quad \text{---} \quad (2)$$

يمكن دمج العلاقتين السابقتين (1) و (2) بالعلاقة العامة الآتية

$$S^* = \begin{cases} \int_a^b f(x)\,dx & ; f(x) \geq 0 \\ -\int_a^b f(x)\,dx & ; f(x) \leq 0 \end{cases}$$

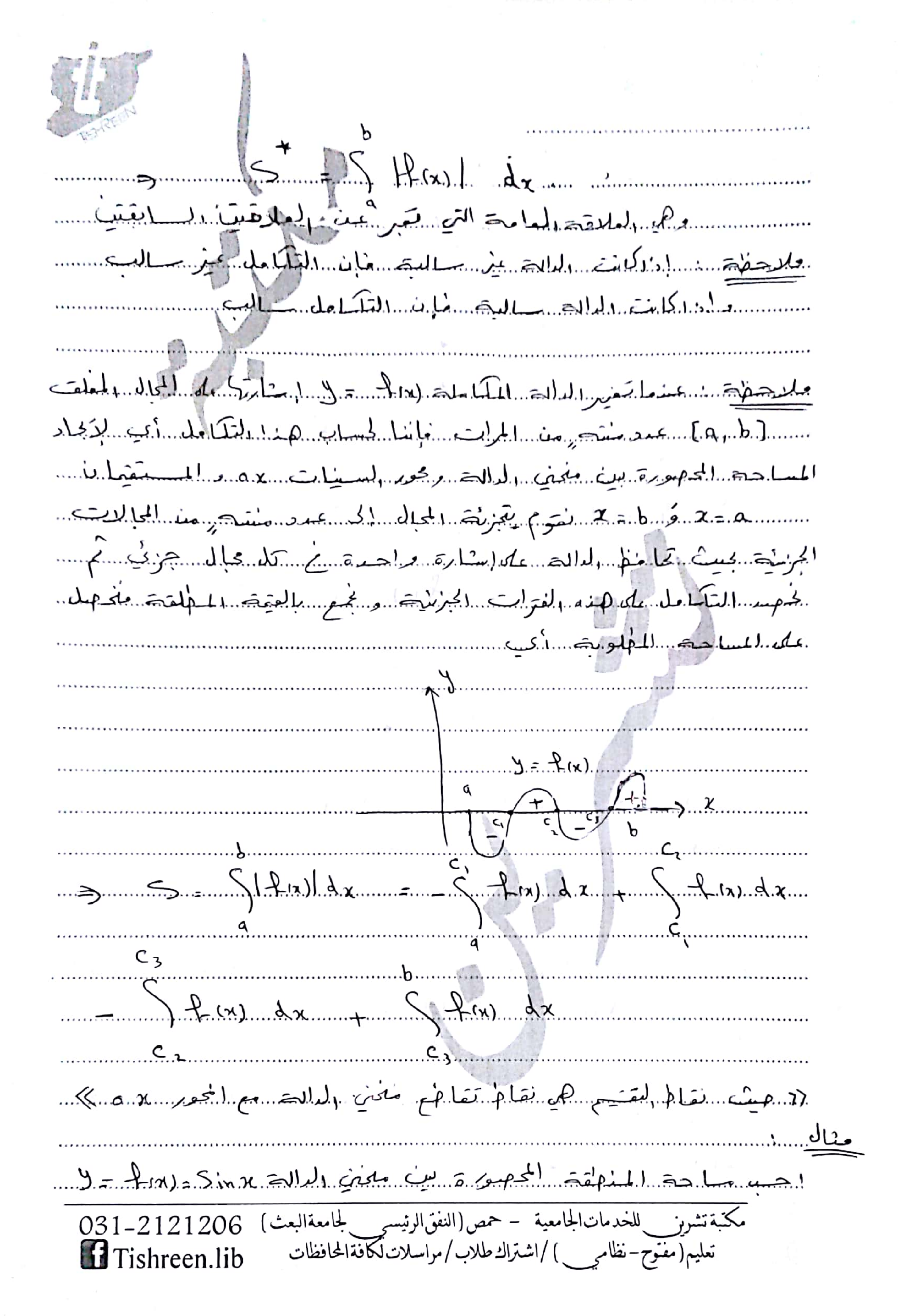
$$\Rightarrow S^* = \int_a^b |f(x)| \, dx$$

وهي العلاقة العامة التي تعبر عن العلاقتين السابقتين

ملاحظة: إذا كانت الدالة غير سالبة فإن التكامل غير سالب

وإذا كانت الدالة سالبة فإن التكامل سالب

ملاحظة: عندما تغير الدالة المكاملة $y = f(x)$ إشارتها على المجال المغلق $[a, b]$ عدد منتهٍ من المرات فإننا لحساب هذا التكامل أي لإيجاد المساحة المحصورة بين منحني الدالة ومحور السينات ox والمستقيمين $x = a$ و $x = b$ نقوم بتجزئة المجال إلى عدد منتهٍ من المجالات الجزئية بحيث تحافظ الدالة على إشارة واحدة في كل مجال جزئي ثم نحسب التكامل على هذه الفترات الجزئية ونجمع بالقيمة المطلقة فنحصل على المساحة المطلوبة أي:



$$\Rightarrow S = \int_a^b |f(x)| \, dx = -\int_a^{c_1} f(x) \, dx + \int_{c_1}^{c_2} f(x) \, dx - \int_{c_2}^{c_3} f(x) \, dx + \int_{c_3}^{b} f(x) \, dx$$

«حيث نقاط التقسيم هي نقاط تقاطع منحني الدالة مع المحور ox»

مثال:

احسب مساحة المنطقة المحصورة بين منحني الدالة $y = f(x) = \sin x$

وذلك لأجل $x \in [0, 2\pi]$ والمحور ox والمستقيمين $x = a$, $x = b$

الحل :

$$\Rightarrow S = \int_a^b |f(x)|\, dx = \int_0^{2\pi} |\sin x|\, dx$$

$$= \int_0^{\pi} f(x)\, dx - \int_{\pi}^{2\pi} f(x)\, dx$$

$$= \int_0^{\pi} \sin x\, dx - \int_{\pi}^{2\pi} \sin x\, dx$$

$$= \left[-\cos x\right]_0^{\pi} - \left[-\cos x\right]_{\pi}^{2\pi}$$

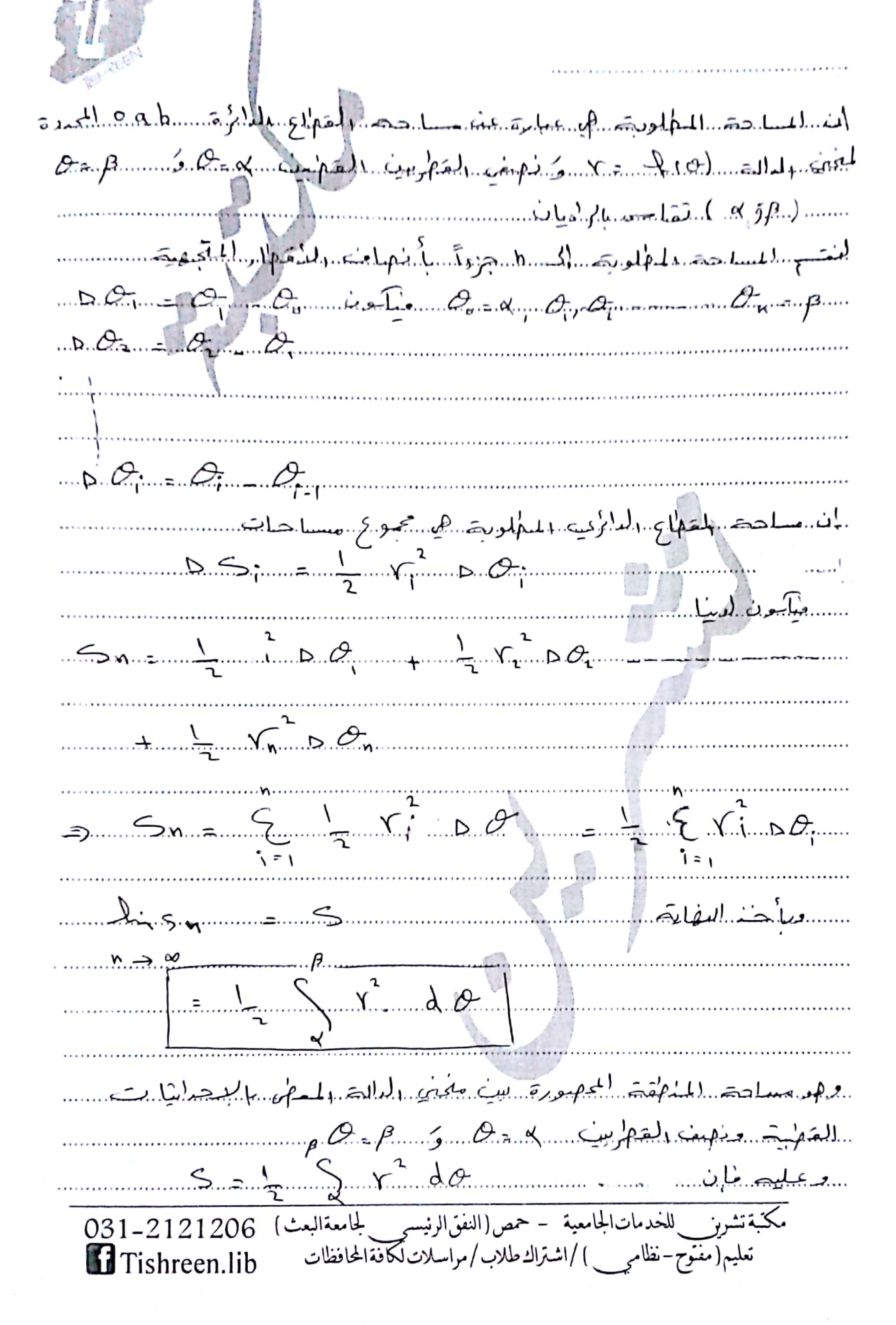
$$= -\cos\pi + \cos 0 - (-\cos 2\pi + \cos\pi)$$

$$= 1 + 1 - (-1 - 1)$$

$= 2 + 2 = 4$ وحدة مربع

ب - حساب المساحة المستوية لمنحني معطى بالإحداثيات القطبية :

بفرض أن معادلة المنحني معطاة بالشكل $r = f(\theta)$ و $f(\theta) > 0$ وذلك لأجل $\theta \in [\alpha, \beta]$ وهذه الدالة مستمرة على المجال المغلق $[\alpha, \beta]$



إن المساحة المطلوبة هي عبارة عن مساحة القطاع الدائري oab المحددة بمنحني الدالة $r = f(\theta)$ ونصفي القطرين $\theta = \alpha$ و $\theta = \beta$

(α و β) تقاس بالراديان

لنقسم المساحة المطلوبة إلى n جزءاً بأنصاف الأقطار الآتية

$\Delta\theta_1 = \theta_1 - \theta_0$ حيث $\theta_0 = \alpha , \theta_1 , \theta_2 \ldots \theta_n = \beta$

$\Delta\theta_2 = \theta_2 - \theta_1$

$\vdots$

$\Delta\theta_i = \theta_i - \theta_{i-1}$

إن مساحة القطاع الدائري المطلوبة هي مجموع مساحات

$$\Delta S_i = \frac{1}{2} r_i^2 \Delta\theta_i$$

فيكون لدينا

$$S_n = \frac{1}{2} r_1^2 \Delta\theta_1 + \frac{1}{2} r_2^2 \Delta\theta_2 + \cdots + \frac{1}{2} r_n^2 \Delta\theta_n$$

$$\Rightarrow S_n = \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{2} r_i^2 \Delta\theta = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{n} r_i^2 \Delta\theta_i$$

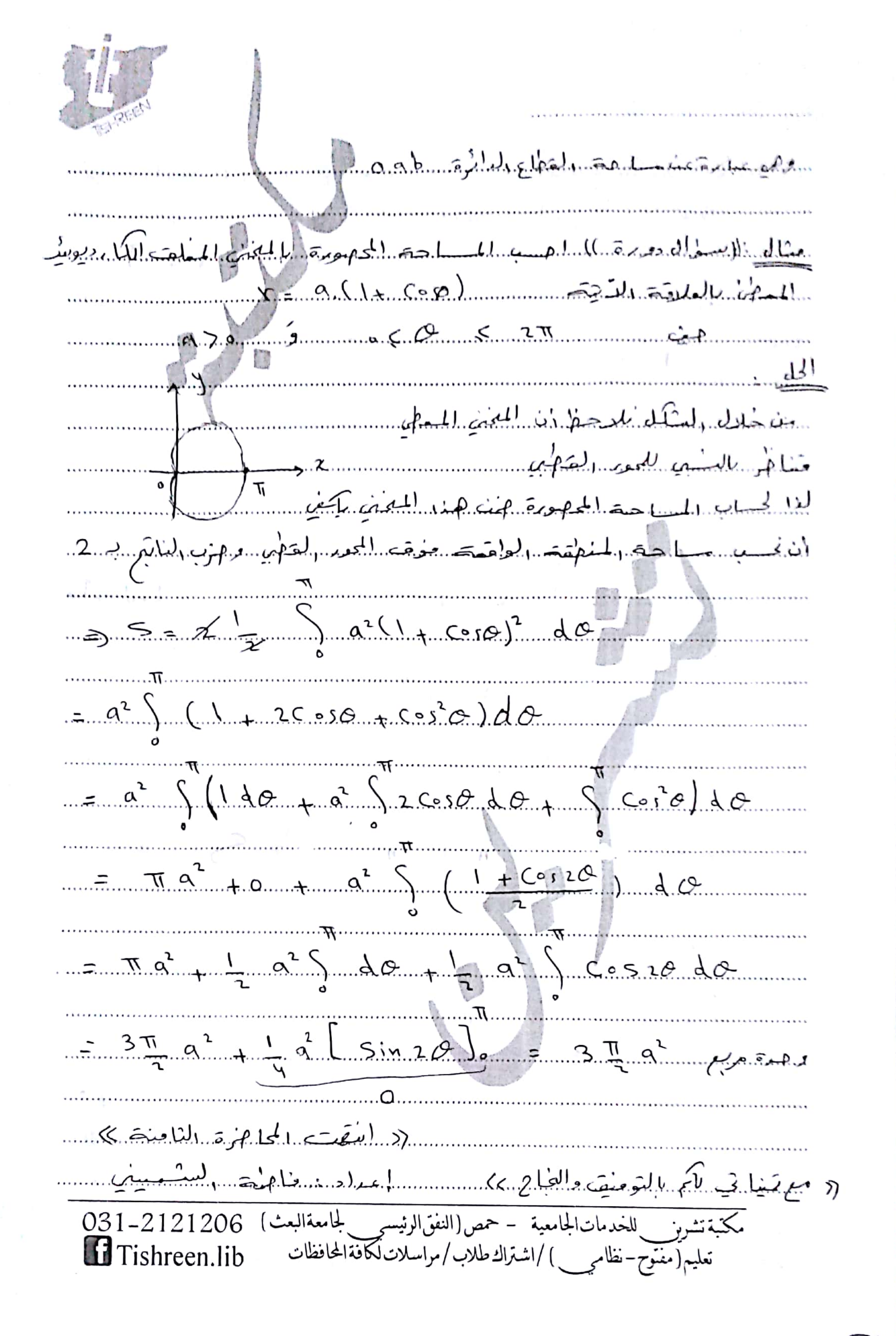
وبأخذ النهاية

$$\lim_{n \to \infty} S_n = S = \frac{1}{2} \int_{\alpha}^{\beta} r^2 \, d\theta$$

وهو مساحة المنطقة المحصورة بين منحني الدالة المعطى بالإحداثيات القطبية ونصفي القطرين $\theta = \alpha$ و $\theta = \beta$

وعليه فإن

$$S = \frac{1}{2} \int_{\alpha}^{\beta} r^2 \, d\theta$$



وهي عبارة عن مساحة القطاع الدائري a.a.b

مثال: (السؤال دورة) احسب المساحة المحصورة بالمنحني المغلق الكارديوئيد المعطى بالعلاقة الآتية $r = a(1+\cos\theta)$

حيث $0 \le \theta \le 2\pi$ و $a > 0$

الحل:

من خلال الشكل نلاحظ أن المنحني المعطى متناظر بالنسبة للمحور القطبي لذا لحساب المساحة المحصورة ضمن هذا المنحني يكفي أن نحسب مساحة المنطقة الواقعة فوق المحور القطبي ونضرب الناتج بـ 2

$$\Rightarrow S = 2\cdot\frac{1}{2}\int_0^{\pi} a^2(1+\cos\theta)^2\,d\theta$$

$$= a^2\int_0^{\pi}(1+2\cos\theta+\cos^2\theta)\,d\theta$$

$$= a^2\int_0^{\pi}(1\,d\theta + a^2\int_0^{\pi}2\cos\theta\,d\theta + \int_0^{\pi}\cos^2\theta)\,d\theta$$

$$= \pi a^2 + 0 + a^2\int_0^{\pi}\left(\frac{1+\cos 2\theta}{2}\right)d\theta$$

$$= \pi a^2 + \frac{1}{2}a^2\int_0^{\pi}d\theta + \frac{1}{2}a^2\int_0^{\pi}\cos 2\theta\,d\theta$$

$$= \frac{3\pi}{2}a^2 + \underbrace{\frac{1}{4}a^2\left[\sin 2\theta\right]_0^{\pi}}_{0} = \frac{3\pi}{2}a^2$$ وحدة مربع

«انتهت المحاضرة الثامنة»

«مع تمنياتي لكم بالتوفيق والنجاح» إعداد: فاطمة الشمسيني